УДК 517.927.2

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ (КРИТИЧНИЙ ВИПАДОК ДРУГОГО ПОРЯДКУ)

Р.Ф. Овчар, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

e-mail: rfovchar@gmail.com

Анотація. *Показано, що існування вихідної крайової задачі залежить від умови, складеної з допомогою нелінійності і першого наближення до шуканого розв'язку. Знайдено необхідну та достатню умови існування розв'язку крайової задачі з імпульсною дією, який є другим наближенням до шуканого. Досліджено умови, в разі невиконання яких шуканого розв'язку* $x(t,\varepsilon): x(\cdot,\varepsilon) \epsilon\, C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I),\ x(t,\cdot) \epsilon\, C[\varepsilon], \varepsilon \epsilon [0,\varepsilon_0], x(t,0) = 0$ *розглянутої крайової задачі з імпульсною дією, який визначається за допомогою методу простих ітерацій, не існує.*

Знайдено умови зведення крайової задачі з імпульсною дією до операторної системи, що є достатнім для доведення факту існування розв'язку такої крайової задачі. Сформульовано теорему, яка дозволяє знайти єдиний розв'язок, що визначається за допомогою ітераційного процесу.

У статті використані ефективні методи теорії збурень, розроблені в працях М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка. Отримані нові результати, які доповнюють дослідження в теорії нелінійних коливань для крайових задач з імпульсною дією.

Ключові слова: ***неоднорідна крайова задача, однорідна крайова задача з імпульсною дією, ортопроектор, псевдо обернена матриця, узагальнений оператор Гріна, операторна система, критичний випадок другого порядку***

Актуальність. Ця стаття присвячена проблемі знаходження конструктивних умов існування та ітераційних алгоритмів побудови розв'язку крайової задачі з імпульсною дією у критичному випадку другого порядку. Актуальність статті обумовлена, перш за все, важливістю практичного застосування теорії крайових задач в різноманітних областях науки – теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування. Питання існування і побудови розв'язків крайових задач з імпульсною дією займають одне із центральних місць в якісній теорії диференціальних рівнянь.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Припустимо, що $rank\,B_0 < r$, тобто $P_{B_0} \neq 0$. Тоді теорему для дослідження існування розв'язку слабо нелінійної крайової задачі з імпульсною дією застосувати не можна.

Мета дослідження. Розглянемо крайову задачу з імпульсною дією

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^*) + x\big((t,\varepsilon), t, \varepsilon\big),\ t \neq \tau_i \\ \Delta x_{|t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \varepsilon J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*) + x(\tau_i - 0, \varepsilon), \\ lx = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \end{cases} \qquad (*)$$

у випадку, який будемо називати критичним випадком другого порядку. Покажемо, що існування вихідної крайової задачі залежить від умови, складеної з допомогою нелінійності і першого наближення до шуканого розв'язку.

Матеріали та методи дослідження. Достатня умова існування розв'язку. Нехай $P_Q \neq 0 \Leftrightarrow rankQ = n_1 < n$ і виконується умова $P_{B_0} \neq 0 \Leftrightarrow rankB_0 < r$.

1. Припустимо, що в розкладі вектор-функції $R(x,t,\varepsilon)\epsilon C^1[x], C[t], C[\varepsilon], R_i(x(r_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)\epsilon C^1[x], c[\varepsilon], R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\epsilon C^1[x], C[\varepsilon]$
такі, що виконуються умови

$$R(0,t,0) = 0, \qquad \frac{\partial R(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = 0,$$

$$R_i(0{,}0) = 0, \qquad \frac{\partial R(0,\varepsilon)}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$R_0(0{,}0) = 0, \qquad \frac{\partial R_0(0,\varepsilon)}{\partial x} = 0.$$

Рівняння

$$B_0 c = -P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau - l\sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i)\,\big[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\big]\Bigg\} \qquad (**)$$

розв'язане тоді і тільки тоді, коли

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\left\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)\left[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right]d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i-0,\varepsilon)+R_i(x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\right\} = 0 \qquad (2)$$

і при цьому має розв'язок у вигляді прямої суми

$$c=c^{(0)}+c^{(1)}, \qquad (3)$$

$$c^{(0)}=-B_0^+P_{Q_d^*}\left\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)\left[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right]d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i-0,\varepsilon)+R_i(x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\right\} = \left(I_r-P_{B_0}\right)c^{(0)}\epsilon R^r\ominus N(B_0);$$

де

$c^{(1)}$ – довільна r – вимірна константа із $N(B_0)$:

$$c^{(1)}=P_{B_0}c=P_{B_0}c^{(1)}\epsilon\, N(B_0).$$

Враховуючи зображення (3) отримаємо такий вираз:

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\ \varepsilon G_1(t)P_{B_0}c^{(1)}+x^{(2)}(t,\varepsilon), \qquad (4)$$

де

$G_1(t)-(n\times r)$ – вимірна матриця, яка має вигляд:

$$G_1(t)=\left(G\begin{bmatrix}A_1(\tau)X_r(\tau)\\ A_{1i}X_r(\tau_i-0)\end{bmatrix}\right)(t)+X(t)Q^+l_1X_r(\cdot),$$

а вектор-функція

$$x^{(2)}(t,\varepsilon)= =\varepsilon\left(G\begin{bmatrix}Z(z_0,\tau,0)+A_1(\tau)\left[X_r(\tau)\left(I_r-P_{B_0}\right)c^{(0)}+\varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)}+x^{(2)}\right]+R(x,\tau,\varepsilon)\\ I_i(z_0,0)+A_{1i}\left[X_r(\tau_i-0)\left(I_r-P_{B_0}\right)c^{(0)}+\varepsilon G_1(\tau_i-0)P_{B_0}c^{(1)}+x^{(2)}\right]+R(x(\tau_i-0),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t) +\varepsilon X(t)Q^+\left[I(z_0(\cdot,c_r^*),0)+l_1\left[X_r(\cdot)\left(I_r-P_{B_0}\right)c^{(0)}+\varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)}+x^{(2)}\right] +R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right].$$

Враховуючи зображення (4), із умови розв'язності (2) рівняння (**) приходимо до алгебраїчної системи для визначення $c^{(1)} \epsilon N(B_0)$:

$$\varepsilon B_1 c^{(1)} + P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \Bigg\{ l_1 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot,\tau)\big[A_1(\tau) x^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big] d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i} x^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right] \Bigg\} = 0, \qquad (5)$$

де $B_1 - (d \times r)$ – вимірна матриця, яка має такий вигляд:

$$B_1 = P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \Bigg\{ l_1 G_1(\cdot) P_{B_0} - l \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) G_1(\tau) P_{B_0} d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i) A_{1i} G_1(\tau_i - 0) P_{B_0} \Bigg\}. \qquad (6)$$

Позначимо через P_{B_1} $(r \times r)$ – вимірну матрицю (ортопроектор), яка проектує r – вимірний евклідів простірR^rна нуль-простір $N(B_1)(d \times r)$ – вимірної матриці B_1, а через $P_{B_1^*} - (d \times d)$– вимірну матрицю (ортопроектор), яка проектує d – вимірнийпростір R^dна нуль-простір $N(B_1^*)(r \times d)$ – вимірної матриці $B_1^* = B_1^T$. Тоді необхідна і достатня умова розв'язності (5) має вигляд

$$P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \Bigg\{ l_1 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot,\tau)\big[A_1(\tau) x^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big] d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i} x^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right] \Bigg\} = 0. \qquad (7)$$

При цій умові система (5) розв'язана відносно $\varepsilon c^{(1)} \epsilon\, N(B_0)$:

$$\varepsilon c^{(1)} = -B_1^{+} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \Big\{ l_1 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot,\tau)\big[A_1(\tau) x^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big] d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i} x^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right] \Big\} + c^{(2)}, \qquad (8)$$

де $c^{(2)}$ – довільний вектор із $N(B_0) \cap N(B_1)$, $c^{(2)} = P_{B_1} c^{(1)} = P_{B_1} P_{B_0} c^{(1)} \epsilon\, N(B_0) \cap N(B_1)$. Припустимо, що перетин нуль-просторів $N(B_0)$і $N(B_1)$ нульовий, тобто $P_{B_0} P_{B_1} = 0$, тоді (5) має єдиний розв'язок (8) ($c^{(2)} = 0$).

Достатньою умовою виконання рівності (7) є вимога, щоб перетин нуль-просторів $N(B_0^*), N(B_1^*)$ і $N(Q^*)$ був нульовим:

$$P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0.$$

Таким чином, при умовах

$$P_{B_0} \neq 0, P_{B_0} P_{B_1} = 0, P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0 \qquad (9)$$

приходимо до наступної операторної системи:

$$\begin{cases} x(t,\varepsilon) = X_r(t)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + \varepsilon G_1(t)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(t,\varepsilon), \\ c^{(0)} = -B_0^{+}P_{Q_d^*}\{l_1\left[\varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^{2}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ \quad -l\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)\left\{A_1(\tau)\left[\varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau,\varepsilon)\right] + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right\}d\tau - \\ \quad -l\sum\limits_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}\left[\varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon)\right] + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right], \\ \varepsilon c^{(1)} = -B_1^{+}P_{B_0^*}P_{Q_d^*}l_1x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x^{(2)}(\tau,\varepsilon) + \\ \quad +R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau - -l\sum\limits_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\}, \\ x^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z(z_0,\tau,0) + A_1(\tau)\left[X_r(\tau)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}\right] + R(x,\tau,\varepsilon) \\ I_i(z_0,0) + A_{1i}\left[X_r(\tau_i - 0)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}\right] + R(x(\tau_i - 0),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)\times \\ \quad \times(t) + \varepsilon X(t)Q^{+}\left[I(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1\left[X_r(\cdot)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + \varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right]. \end{cases} \tag{10}$$

Таким чином, у випадку $P_{B_0} \neq 0$ операторна системане належить до класу систем, для розв'язання яких застосовується метод простих ітерацій. Виділенням додаткової змінної система при умовах (9) зводиться (регуляризується) до виду (10). При цьому розкладом (3) r – вимірної константи в пряму суму двох, визначених по-різному величин, розмірність операторної системи підвищується на $r = \dim N(Q)$. Це дасть можливість при (9) звести $(2n + r)$ – вимірну систему до регулярної $2(n + r)$– вимірної операторної системи (0), для розв'язання якої застосовується збіжний метод простих ітерацій.

2. Для дослідження крайової задачі з імпульсною дією (*) в загальному випадку, коли мають місце умови

$$R(0,t,0) = 0, \qquad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial x} = 0,$$

$$R_i(0{,}0) = 0, \qquad \frac{\partial R_i(0{,}0)}{\partial x} = 0,$$

$$R_0(0{,}0) = 0, \qquad \frac{\partial R_0(0{,}0)}{\partial x} = 0.$$

запишемо в явному вигляді лінійні по xі ε доданки, які входять в $R(x,t,\varepsilon), R_i(x,\varepsilon), R_0(x,\varepsilon)$. При цьому необхідні додаткові умови неперервної диференційованості вектор-функції $Z(z,t,\varepsilon)$і вектор-функціоналів $I_i(z,\varepsilon),\ I(z,\varepsilon)$по ε:

$$Z(z,t,\varepsilon) \in C^1[\varepsilon], \qquad I_i(z,\varepsilon) \in C^1[\varepsilon], \qquad I(z,\varepsilon) \in C^1[\varepsilon].$$

Зберігаючи для $R(x,t,\varepsilon), R_i(x,\varepsilon), R_0(x,\varepsilon)$післявиділенняіз них членів$\varepsilon A_2(t)x,\ \varepsilon A_{2i}x,\ \varepsilon l_2 x$відповідно, попереднє позначення, отримуємо для нелінійностей$Z(z_0+x,t,\varepsilon),\ I_i(z_0+x,\varepsilon),\ I(z_0+x,\varepsilon)$наступні розклади:

$$Z(z_0+x,t,\varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*),t,\varepsilon) + A_1(t)x + \varepsilon A_2(t)x + R(x,t,\varepsilon),$$

де

$$A_2(t) = A_2(t,c_r^*) = \left.\frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_r^*),\ \ \varepsilon=0},$$

(в розглянутому вище випадку (1) $A_2(t)=0$),

$$J_i(z_0+x,\varepsilon) = J_i(z_0(\tau_i-0,c_r^*),\varepsilon) + A_{1i}x(\tau_i-0,\varepsilon) + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i-0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon), \qquad (11)$$

де

$$A_{2i} = \left.\frac{\partial^2 I_i(z,\varepsilon)}{\partial\varepsilon\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_r^*),\ \ \varepsilon=0},$$

(в розглянутому вище випадку (1) $A_{2i}=0$),

$$I(z_0+x,\varepsilon) = I(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon l_2 x(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

(в розглянутому вище випадку (1) $l_2=0$).

Аналогічно попереднім викладкам від крайової задачі

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + \varepsilon\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x + \varepsilon A_2(t)x + R(x,t,\varepsilon)\}, \qquad t \neq \tau_i, \\ \Delta x_{|t=\tau_i} = S_i x(\tau_i-0) + \varepsilon\{I_i(z_0(\tau_i-0,c_r^*),0) + A_{1i}x(\tau_i-0,\varepsilon) + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i-0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)\} \\ lx = \varepsilon\{I(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon l_2x(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\} \end{cases} \quad (12)$$

приходимо до еквівалентної на множині кусково-неперервно диференційовних по t з розривами першого роду при $t=\tau_i$, неперервних по $\varepsilon\epsilon[0,\varepsilon_0],\ x(t,0)=0$ вектор-функцій $x(t,\varepsilon)$ операторної системи

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$B_0 c = -P_{Q_d^*}\Big\{l_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon l_2\big[X_r(\cdot)c + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$$
$$- l\int_a^b K(\cdot,\tau)\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau)\big[X_r(\tau)c + x^{(1)}(\tau,\varepsilon)\big]$$
$$+ R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau$$
$$- l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + \varepsilon A_{2i}\big[X_r(\tau_i - 0)c + x^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon)\big]\right.$$
$$+ R_i(x(\tau_i$$
$$\left.- 0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\Big\}, \qquad (13)$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z(z_0,\tau,0) + [A_1(\tau) + \varepsilon A_2(\tau)]\,x(\tau,\varepsilon) + R(x,\tau,\varepsilon) \\ I_i(z_0,0) + [A_{1i} + \varepsilon A_{2i}]\,x(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t)$$
$$+ \varepsilon X(t)Q^+[I(z_0(\cdot,c_r^*),0) + [l_1 + \varepsilon l_2]x(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)].$$

Друге рівняння (13) розв’язано тоді і тільки тоді, коли

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Big\{l_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon l_2\big[X_r(\cdot)c + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$$
$$- l\int_a^b K(\cdot,\tau)\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau)\big[X_r(\tau)c + x^{(1)}(\tau,\varepsilon)\big]$$
$$+ R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau$$
$$- l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + \varepsilon A_{2i}\big[X_r(\tau_i - 0)c + x^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon)\big]\right.$$
$$\left.+ R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\Big\}$$
$$= 0 \qquad (14)$$

і при виконанні цієї умови має розв’язок у вигляді прямої суми

$$c = c^{(0)} + c^{(1)},$$

де

$$c^{(0)} == -B_0^{+} P_{Q_d^*} \Bigg\{ l_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon l_2 x(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$$

$$- l \int_a^b K(\cdot,\tau)\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau)x(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau$$

$$- l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\Bigg\}$$

$$= \left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} \epsilon R^r \ominus N(B_0),$$

$$c^{(1)} = P_{B_0} c = P_{B_0} c^{(1)} \in N(B_0).$$

Із третього рівняння операторної системи (13), враховуючи зображення константи c, отримаємо

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G_1(t) P_{B_0} c^{(1)} + x^{(2)}(t,\varepsilon),$$

де $(n \times n)$ – вимірна матриця$G_1(t)$така ж, що і в формулі (4), а вектор-функція $x^{(2)}(t,\varepsilon)$ має вигляд:

$$x^{(2)}(t,\varepsilon)$$

$$= \varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z(z_0,\tau,0) + [A_1(\tau) + \varepsilon A_2(\tau)]\left[X_r(\tau)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + x^{(1)}(\tau,\varepsilon)\right] + R(x,\tau,\varepsilon) \\ I_i(z_0,0) + [A_{1i} + \varepsilon A_{2i}]\left[X_r(\tau_i - 0)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + x^{(1)}((\tau_i - 0),\varepsilon)\right] + R_i(x(\tau_i - 0),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t)$$

$$+ \varepsilon X(t) Q^{+}\left[I(z_0(\cdot,c_r^*),0) + [l_1 + \varepsilon l_2]\left[X_r(\cdot)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right].$$

Враховуючи $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ і c із умови (14)розв'язності другого рівняння (13) отримаємо алгебраїчну систему для визначення $c^{(1)} \epsilon N(B_0)$:

$$\varepsilon B_1 c^{(1)} + P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \Bigg\{ l_1 x^{(2)} \varepsilon l_2 [X_r(\cdot)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + x^{(1)}] + R_0(x,\varepsilon)$$

$$- l \int_a^b K(\cdot,\tau)\big[A_1(\tau)x^{(2)} + \varepsilon A_2(\tau)\big[X_r(\tau)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + x^{(1)}\big]$$

$$+ R(x,\tau,\varepsilon)\big]d\tau$$

$$- l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x^{(2)} + \varepsilon A_{2i}\left[X_r(\tau_i - 0)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + x^{(1)}\right]\right.$$

$$\left. + R_i(x,\varepsilon)\right]\Bigg\} = 0,$$

де, на відміну від (6) $(d \times r)$ – вимірна матриця B_1 записується так:

$$B_1 = P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\left\{[l_1 G_1(\cdot) + l_2 X_r(\cdot)]P_{B_0} - l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)G_1(\tau) + A_2(\tau)X_r(\tau)]P_{B_0}\,d\tau \right.$$
$$- l\sum_{i=1}^{p} \overline{K}(\cdot,\tau_i)\,[A_{1i}G_1(\tau_i - 0)$$
$$\left. + A_{2i}X_r(\tau_i - 0)]P_{B_0}\right\}. \qquad (15)$$

Позначаючи через P_{B_1} і $P_{B_1^*}$ ортопроектори на нуль-простори $N(B_1)$ і $N(B_1^*)$ матриць B_1 (15) і $B_1^* = B_1^T{:}\,P_{B_1}{:}\,R^r \to N(B_1); P_{B_1^*}{:}\,R^d \to N(B_1^*)$, при умовах (9) від операторної системи (13) приходимо до системи

$$\left\{\begin{array}{l}
x(t,\varepsilon) = X_r(t)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + \varepsilon G_1(t)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(t,\varepsilon),\\
c^{(0)} = B_0^{+}P_{Q_d^*}\{l_1\left[\varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^2\right] + \varepsilon l_2 x(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\\
\quad -l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)\left[\varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}\right] + \varepsilon A_2(\tau)x(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau -\\
\quad -l\sum_{i=1}^{p}\overline{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}\left[\varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}\right] + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right],\\
\varepsilon c^{(1)} = -B_1^{+}P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{l_1 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon l_2 x(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x^{(2)}(\tau,\varepsilon) + \qquad (16)\\
+\varepsilon A_2(\tau)x(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\overline{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\},\\
x^{(2)}(t,\varepsilon) =\\
= \varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z(z_0,\tau,0) + [A_1(\tau) + \varepsilon A_2(\tau)]\left[X_r(\tau)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau,\varepsilon)\right] + R(x,\tau,\varepsilon)\\ I_i(z_0,0) + [A_{1i} + \varepsilon A_{2i}](X_r(\tau_i - 0)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)\times\\
\times(t) + \varepsilon X(t)Q^{+}\left[I(z_0(\cdot,c_r^*),0) + [l_1 + \varepsilon l_2]\left[X_r(\cdot)\left(I_r - P_{B_0}\right)c^{(0)} + \varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right].
\end{array}\right.$$

Система (16) належить до класу операторних систем, для яких застосовується метод простих ітерацій. Схема дослідження і розв'язання (16) аналогічна схемі дослідження і розв'язання (10).

Ітераційний процес для (16) розглядається нижче на прикладі системи (10), тобто при умовах (1).

Ітераційний алгоритм. За допомогою методу простих ітерацій для операторної системи (10) побудуємо ітераційний процес відшукання розв'язку

$x(t,\varepsilon): x(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $x(t,\cdot) \in C[\varepsilon], \varepsilon \epsilon [0,\varepsilon_0]$, $x(t,0)=0$ крайової задачі з імпульсною дією (*). Перше наближення $x_1^{(2)}(t,\varepsilon)$до $x^{(2)}(t,\varepsilon)$покладемо таким:

$$x_1^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z(z_0,\tau,0) \\ J_i(z_0,0)\end{bmatrix}\right)(t) + \varepsilon X(t)Q^+J(z_0(\cdot,c_r^*),0).$$

За визначенням узагальненого оператора Гріна $\left(G\begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\right)(t)$вектор-функція $x_1^{(2)} = x_1^{(2)}(t,\varepsilon)$ – єдиний розв'язок наступної крайової задачі з імпульсною дією:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A(t)x_1 + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x_{1}{}_{|t=\tau_i} = S_i x_1(\tau_i - 0) + \varepsilon J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*),0), \\ l x_1 = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0). \end{cases}$$

Такий розв'язок існує в силу вибору $c_r^* \in R^r$із рівняння (5) для породжуючи амплітуд:

$$F(c_r) = P_{Q_d^*}\left\{J(z_0(\cdot,c_r),0) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)Z(z_0(\tau,c_r),\tau,0)d\tau \right.$$
$$\left. - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)J_i(z_0(\tau_i-0,c_r),0)\right\} = 0.$$

Перше наближення $x_1(t,\varepsilon)$до шуканого розв'язку $x(t,\varepsilon)$крайової задачі з імпульсною дією вважаємо рівним $x_1^{(2)}(t,\varepsilon)$: $x_1(t,\varepsilon) = x_1^{(2)}(t,\varepsilon)$.

Друге наближення $x_2^{(2)}(t,\varepsilon)$ до $x^{(2)}(t,\varepsilon)$покладемо таким:

$$x_2^{(2)}(t,\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z(z_0,\tau,0) + A_1(\tau)\left[X_r(\tau)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_1^{(0)} + x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon)\right] + R(x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \\ J_i(z_0,0) + A_{1i}\left[X_r(\tau_i-0)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_1^{(0)} + x_1^{(2)}(\tau_i-0,\varepsilon)\right] + R_i(x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t)$$
$$+ \varepsilon X(t)Q^+\left[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1\left[X_r(\cdot)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_1^{(0)} + x_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_0\left(x_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)\right].$$

За визначенням узагальненого оператора Гріна $\left(G\begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\right)(t)$вектор-функція $x_2^{(2)}(t,\varepsilon)$ – єдиний розв'язок крайової задачі з імпульсною дією

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A(t)x_2 + \varepsilon\left\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)\left[X_r(t)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_1^{(0)} + x_1^{(2)}\right] + R\left(x_1^{(2)},t,\varepsilon\right)\right\}, \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x_{2}{}_{|t=\tau_i} = S_i x_2(\tau_i - 0) + \varepsilon\left\{J_i(z_0(\tau_i-0,c_r^*),0) + A_{1i}\left[X_r(\tau_i-0)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_1^{(0)} + x_1^{(2)}\right] + R_i\left(x_1^{(2)},\varepsilon\right)\right\}, \\ l x_2 = \varepsilon\left\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1\left[X_r(\cdot)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_1^{(0)} + x_1^{(2)}\right] + R_0\left(x_1^{(2)},\varepsilon\right)\right\}. \end{cases} \quad (17)$$

Існування такого розв’язку забезпечується вибором векторної константи $c_1^{(0)} \epsilon R^r$ із умови розв’язності задачі (17):

$$B_0 c_1^{(0)} P_{Q_d^*} \Big\{ l_1 x_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0\left(x_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)\left[A_1(\tau)x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\left(x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\right]d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x_1^{(2)}(\tau_i-0,\varepsilon) + R_i\left(x_1^{(2)}(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon\right)\right]\Big\} = 0. \quad (18)$$

За цієї умови із (18) визначаємо перше наближення до $c^{(0)} \epsilon\, R^r$ за формулою

$$c_1^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Big\{ l_1 x_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0\left(x_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)\left[A_1(\tau)x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\left(x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\right]d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x_1^{(2)}(\tau_i-0,\varepsilon) + R_i\left(x_1^{(2)}(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon\right)\right]\Big\}. \quad (19)$$

Друге наближення $x_2(t,\varepsilon)$ до шуканого розв’язку запишеться так:

$$x_2(t,\varepsilon) = X_r(t)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_1^{(0)} + x_1^{(2)}(t,\varepsilon).$$

Третє наближення шукаємо як розв’язок крайової задачі з імпульсною дією

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = A(t)x_3 + \varepsilon\left\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)\left[X_r(t)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_2^{(0)} + \varepsilon G_1(t)P_{B_0}c_1^{(1)} + x_2^{(2)}\right] + +R\left(x_2^{(2)},t,\varepsilon\right)\right\}, t \neq \tau_i, \\ \Delta x_{3\,|t=\tau_i} = S_i x_3(\tau_i - 0) + \varepsilon\{J_i(z_0(\tau_i-0,c_r^*),0) + A_{1i}\left[X_r(\tau_i-0)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_2^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau_i-0)P_{B_0}c_1^{(1)} + x_2^{(2)}\right] + \\ \qquad +R_i\left(x_2^{(2)},\varepsilon\right)\}. \\ l x_3 = \varepsilon\left\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1\left[X_r(\cdot)\left(I_r - P_{B_0}\right)c_2^{(0)} + \varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c_1^{(1)} + x_2^{(2)}\right] + R_0\left(x_2^{(2)},\varepsilon\right)\right\}. \end{cases}$$

де константи $c_2^{(0)}$, $c_1^{(1)}$ установлюються із умови її розв’язності

$$B_0 c_2^{(0)} + P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1\left[\varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_0\left(x_2^{(2)},\varepsilon\right)$$

$$- l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)\left[\varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c_1^{(1)} + x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon)\right] + R\left(x_2^{(2)},\tau,\varepsilon\right)d\tau$$

$$- l\sum_{i=1}^{p}\overline{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}\left[\varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x_2^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon)\right]\right.$$

$$\left.+ R_i\left(x_2^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon\right)\right]\Bigg\} = 0.$$

Із необхідної і достатньої умови розв'язності останньої системи відносно $c_2^{(0)} = (I_r - P_{B_0})c_2^{(0)} \epsilon\, R^r \ominus N(B_0)$ отримаємо алгебраїчну систему для визначення $\varepsilon c^{(1)} \epsilon\, N(B_0)$:

$$\varepsilon B_1 c_1^{(1)} = -P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1 x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0\left(x_2^{(2)},\varepsilon\right)$$

$$- l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\left(x_2^{(2)},\tau,\varepsilon\right)d\tau$$

$$- l\sum_{i=1}^{p}\overline{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x_2^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i\left(x_2^{(2)},\varepsilon\right)\right]\Bigg\}.$$

Оскільки за припущенням умови $P_{B_0}P_{B_1} = 0, P_{B_1^*}P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$виконуються, то із останніх двох систем однозначно знаходимо перше наближення $c_1^{(1)}$ до $c^{(1)}(\varepsilon)$і друге наближення $c_2^{(0)}$ до $c^{(0)}(\varepsilon)$ за формулами

$$\varepsilon c_1^{(1)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Bigg\{ l_1 \left[\varepsilon G_1(\cdot) P_{B_0} c_1^{(1)} + x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon) \right] + R_0\left(x_2^{(2)}, \varepsilon \right)$$

$$- l \int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau) \left[\varepsilon G_1(\tau) P_{B_0} c_1^{(1)} + x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon) \right] + R(x_2,\tau,\varepsilon) d\tau$$

$$- l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i) \left[A_{1i} \left[\varepsilon G_1(\tau_i - 0) P_{B_0} c_1^{(1)} + x_2^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) \right] + R_i(x_2,\varepsilon) \right] \Bigg\}.$$

Третє наближення $x_3^{(2)}(t,\varepsilon)$до $x^{(2)}(t,\varepsilon)$ і $x_3(t,\varepsilon)$до шуканого розв'язку $x(t,\varepsilon)$ запишемо так:

$$x_3^{(2)}(t,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \left(G \begin{bmatrix} Z(z_0,\tau,0) + A_1(\tau) \left[X_r(\tau)\left(I_r - P_{B_0}\right) c_2^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau) P_{B_0} c_1^{(1)} + x_2^{(2)} \right] + R(x_2,\tau,\varepsilon) \\ J_i(z_0,0) + A_{1i} \left[X_r(\tau_i - 0)\left(I_r - P_{B_0}\right) c_2^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau_i - 0) P_{B_0} c_1^{(1)} + x_2^{(2)} \right] + R_i(x_2,\varepsilon) \end{bmatrix} \right)(t)$$
$$+ \varepsilon X(t) Q^+ \left[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1 \left[X_r(\cdot)\left(I_r - P_{B_0}\right) c_2^{(0)} + \varepsilon G_1(\cdot) P_{B_0} c_1^{(1)} + x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon) \right] \right.$$
$$\left. + R_0\left(x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon \right) \right].$$

$$x_3(t,\varepsilon) = X_r(t)\left(I_r - P_{B_0}\right) c_2^{(0)} + \varepsilon G_1(t) P_{B_0} c_1^{(1)} + x_3^{(2)}(t,\varepsilon).$$

Продовжуючи аналогічний процес, із операторної системи (10) зауважуємо, що для визначення розв'язку $x(t,\varepsilon)$: $x(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I), x(t,\cdot) \epsilon C[\varepsilon]$, $\varepsilon \epsilon [0,\varepsilon_0]$, $x(t,0) = 0$ крайової задачі з імпульсною дією (*) отримуємо наступну ітераційну процедуру:

$$\begin{cases} \varepsilon c_{k-1}^{(1)} = -B_1^{+} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x_k^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau) x_k^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right] d\tau - \\ \qquad -l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i) \left[A_{1i} x_k^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x_k(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\}, \\ c_k^{(0)} = -B_0^{+} P_{Q_d^*} \{ l_1 \left[\varepsilon G_1(\cdot) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_0(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau) \times \\ \qquad \times \left[\varepsilon G_1(\tau) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}(\tau,\varepsilon)\right] + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)] d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i) [A_{1i}[\varepsilon G_1(\tau_i - 0) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + \\ \qquad + x_k^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon)] + R_i(x_k(\tau_i - 0,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]\}, \\ x_{k+1}^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \left(G \begin{bmatrix} Z(z_0,\tau,0) + A_1(\tau)\left[X_r(\tau)(I_r - P_{B_0}) c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}\right] + R(x_k,\tau,\varepsilon) \\ J_i(z_0,0) + A_{1i}\left[X_r(\tau_i - 0)(I_r - P_{B_0}) c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(\tau_i - 0) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}\right] + R(x_k,\varepsilon) \end{bmatrix} \right)(t) + \\ \qquad + \varepsilon X(t) Q^{+} \left[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1\left[X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0}) c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(\cdot) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_0(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right], \\ x_k(t,\varepsilon) = X_r(t)(I_r - P_{B_0}) c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(t) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_{k+1}^{(2)}(t,\varepsilon), \\ k = 0,1,2,\dots;\ x_0(t,\varepsilon) = x_0^{(2)}(t,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Збіжність ітераційного процесу (20) встановлюється методом мажорантних рівнянь Ляпунова. Проте, як і в некритичному випадку так і в критичному випадкупершого порядку, для доведення факту існуваннярозв'язкукрайовоїзадачі з імпульсноюдією (*) достатньознайтиумовизведенняї до операторноїсистеми (16). Таким чином, справедлива наступна теорема.

Результати дослідження та їх обговорення. *Теорема.* Нехай крайова задача з імпульсноюдією (1) задовольняєвказанимвищеумовам так, щомаємісцекритичнийвипадок$(rank\, Q = n_1 < n)$і відповідна породжуюча крайова задача з імпульсною дією

$$\dot{z} = A(t)z + f(t), \qquad t \neq \tau_i, \qquad \Delta z_{|t=\tau_i} = S_i z + a_i, \qquad \tau_i \in [a,b], i\in\mathbb{Z}$$

$$lz = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^m, \qquad t\in[a,b]$$

при умові $d = m - n_1$ і тільки при ній має r – параметричне сімейство $(r = n - n_1)$породжуючих розв’язків:

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + \left(G\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) + X(t)Q^{+}\alpha. \tag{***}$$

Розглянемо випадок

$$P_{B_0} \neq 0, \ \ P_{B_0} P_{B_1} = 0. \tag{21}$$

Тоді для кожного значення вектора$c_r = c_r^* \epsilon R^r$, який задовольняє рівняння для породжуючих амплітуд, при умовах

$$P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \qquad (22)$$

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_0\left(x_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)\left[A_1(\tau)x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R\left(x_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\right]d\tau - l\sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i)\left[A_{1i}x_1^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i\left(x_1^{(2)}(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon\right)\right]\right\} = 0 \qquad (23)$$

крайова задача з імпульсною дією (*) має єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \epsilon C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I),\ x(t,\cdot) \epsilon C[\varepsilon], \varepsilon\epsilon[0,\varepsilon_0]$, і який обертається в нуль при $\varepsilon = 0$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0,\varepsilon_*]$ітераційного процесу (20). Крайова задача з імпульсною дією має при цьому єдиний розв'язок $z(t,\varepsilon)\colon z(\cdot,\varepsilon) \epsilon C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I),\ z(t,\cdot) \epsilon C[\varepsilon], \varepsilon\epsilon[0,\varepsilon_*]$, який обертається при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $z_0(t, c_r^*)$ (***). Цей розв'язок визначається за допомогою ітераційного процесу (20) і формули

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_{k+1}(t,\varepsilon), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Висновки і перспективи. У розглянутому критичному випадку (21) крайових задач умова (23) – необхідна і достатня умова існування розв'язку, який є другим наближенням до шуканого. Якщо (23) не виконується, то шуканого розв'язку $x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \epsilon C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I),\ x(t,\cdot) \epsilon C[\varepsilon], \varepsilon\epsilon[0,\varepsilon_0], x(t,0) = 0$крайової задачі з імпульсною дією (*), який визначається за допомогою методу простих ітерацій, не існує. У цьому випадку можна говорити про псевдорозв'язок крайової задачі з імпульсною дією (*). В розглянутому випадку лише достатня умова (22) являє собою обмеження, яке забезпечує існування розв'язку і можливість його побудови за допомогою ітераційного аналогу методу малого параметра Ляпунова-Пуанкаре.

Список літератури

1. Самойленко А .М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием // А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К. : Вища шк.: 1987. – 287 с.
2. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач // А. А. Бойчук – К. : Наук. думка; 1990. – 96 с.
3. Овчар Р.Ф. Дослідження розв'язків слабозбурених крайових задач для систем з імпульсною дією // Р.Ф. Овчар. –К.: Науковий вісник; 2011. - 243 с.

References

1. Samoylenko, A. M. (1987). Differencial'nyyeuravneniya s impul'snymvozdeystviyem [Differential equations with impulse action]. Kyiv: Vyshcha shkola, 277.
2. Boychuk, A. A. (1990). Konstruktivnye metody analyza kraevyh zadach [Constructive methods for analyzing boundary value problems]. Kyiv, 96.
3. Ovchar, R.F. (2011). Doslydgennya rozvyazkiv slabozburenyh krayovyh zadach dlya system z impul'snoyu diyeyu [Investigation of solutions of weakly perturbed boundary value problems for systems with impulse action]. Kyiv, Naukovyi visnyk, 243.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ (КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА)

Р.Ф. Овчар

Аннотация. *Показано, что существование исходной краевой задачи зависит от условия, составленной при помощи нелинейности и первого приближения к искомому решению. Найдено необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи с импульсным воздействием, который является вторым приближением к искомому. Исследованы условия, в случае невыполнения которых искомого решения* $x(t,\varepsilon): x(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I),\ x(t,\cdot) \in C[\varepsilon], \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], x(t,0)=0$ *рассматриваемой краевой задачи с импульсным воздействием, который определяется с помощью метода последовательных приближений, не существует.*

Найдены условия возведения краевой задачи с импульсным воздействием операторной системы, что является достаточным для доказательства факта существования решения такой краевой задачи. Сформулировано теорему, которая позволяет найти единственное решение, которое определяется с помощью итерационного процесса.

В статье использованы методы теории возмущений, разработанные в трудах М. М. Крылова, М. М. Боголюбова, Ю. Митропольского, А. М. Самойленка. Получены новые результаты, которые дополняют исследования в теории нелинейных колебаний для краевых задач с импульсным воздействием.

Ключевые слова: ***неоднородная краевая задача, однородная краевая задача с импульсным воздействием, ортопроектор, псевдообратная матрица, обобщённый оператор Грина, операторная система, критический случай второго порядка***

BOUNDARY PROBLEM WITH IMPULSE ACTION (SECOND ORDER CRITICAL CASE)

R. Ovchar

Abstract. *It is shown that the existence of an initial boundary value problem depends on the condition, compiled with the help of nonlinearity and the first approximation to the desired solution. We find the necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of the boundary value problem with a pulsed action, which is a second approximation to the desired one. Conditions were studied in the case of failure to fulfill the desired solution* $x(t,\varepsilon): x(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I),\ x(t,\cdot) \in C[\varepsilon], \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], x(t,0) = 0$ *of the considered boundary value problem with pulsed action, which is determined by the method of simple iterations, doesn't exist.*

Conditions for the construction of a boundary value problem with a pulsed action to the operator system are found, which is sufficient to prove the existence of the solution of such boundary value problem. The theorem is formulated, which allows us to find a single solution, which is determined by the iterative process.

Effective methods of perturbation theory are used, developed in the works of M. Krylov, M. Bogolyubov, Y. Mitropolsky, A. Samoilenko. New results are obtained, which complement research in the theory of nonlinear oscillations for boundary value problems with impulse action.

Keywords: ***heterogeneous boundary value problem, homogeneous boundary value problem with impulse action, orthogonal projection, pseudo-inverse matrix, generalized Green operator, operator system, critical case of second order***