

**ПОБУДОВА ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ,
ОТРИМАНИХ ЗМІЩЕННЯМ МЕРИДІАНА**

С.Ф. Пилипака, доктор технічних наук, професор

В. М. Несвідомін, доктор технічних наук, професор

І.Ю. Грищенко, кандидат технічних наук, доцент

В. М. Бабка, кандидат технічних наук, доцент

А. В. Несвідомін, кандидат технічних наук, доцент

Т. М. Воліна, кандидат технічних наук, доцент

Я. С. Кремець, кандидат технічних наук

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: psf55@ukr.net

Анотація. Геодезичні лінії поверхні є аналогом прямих ліній на площині. Окрім того, що вони з'єднують дві точки поверхні по найкоротшій відстані, вони є траєкторіями намотування армуючих ниток при зміцненні балонів високого тиску. Так само, як на площині із заданої точки можна провести пучок прямих ліній у різних напрямках, так само і на поверхні існують геодезичні лінії, які проходять через задану точку у різних напрямках. Знаходження геодезичних ліній поверхні в загальному випадку зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку.

Мета дослідження – дослідити геодезичні лінії на поверхні, утвореній обертанням заданої плоскої кривої навколо вертикальної осі та їх трансформацію при зміщенні цієї кривої від або до осі.

Для поверхонь обертання диференціальне рівняння другого порядку можна понизити до першого порядку і навіть звести до інтеграла на основі відомої формули Клеро. Однак в цьому випадку геодезичні лінії у всіх напрямках можна побудувати тільки для обмеженого числа поверхонь обертання, а на решті поверхонь – тільки обмежені фрагменти геодезичних ліній. У статті розглянуто побудову геодезичних ліній за допомогою чисельного розв'язування диференціального рівняння другого порядку. Зроблено візуалізацію отриманих результатів.

Ключові слова: геодезична лінія, поверхня обертання, диференціальне рівняння, чисельні методи

Актуальність. При армуванні оболонки велике значення має напрям намотування ниток. Вони повинні точно збігатися із геодезичними лініями. Якщо буде певне відхилення намотаних ниток від геодезичних ліній, то у напруженому

стані оболонки внаслідок внутрішнього тиску вони будуть намагатися змінити своє розташування на поверхні і не будуть працювати на розтяг. Це стосується і вантових накриттів, тобто висячих конструкцій, які тримаються на розтягнутих тросах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Окрім армування поверхонь нитками геодезичні лінії мають значення як траєкторії руху матеріальних частинок по них. Якщо частинка примусово ковзає по поверхні, то її траєкторія наближається до геодезичної лінії по мірі зростання швидкості ковзання. Ця особливість може враховуватися при проектуванні робочих органів, по яких ковзають частинки ґрунту [1]. Щоб уникнути розв'язування диференціальних рівнянь в праці [2] пропонується графо-аналітичний спосіб наближеної побудови геодезичних ліній у вигляді ламаної. У праці [3] розглянуто побудову геодезичної лінії в заданому напрямі на поверхні, а праці [4] – на односторонній поверхні. Побудові геодезичних ліній на різних поверхнях обертання присвячено роботи [5, 6].

Мета дослідження – дослідити геодезичні лінії на поверхні, утвореній обертанням заданої плоскої кривої навколо вертикальної осі та їх трансформацію при зміщенні цієї кривої від або до осі.

Матеріали і методи дослідження. Дослідження велися теоретичним шляхом складанням диференціальних рівнянь геодезичних ліній на поверхні обертання. Для отримання результату використовувалися чисельні методи інтегрування диференціальних рівнянь в середовищі "Simulink" програмного продукту "MatLab". Математичні перетворення здійснювалися за допомогою пакета символічної математики програмного продукту "Mathematica".

Результати досліджень та їх обговорення. Задамо меридіан поверхні обертання плоскою кривою у вертикальній площині XOZ , який описується параметричними рівняннями:

$$x = \varphi(u); \quad z = \psi(u), \quad (1)$$

де u – незалежна змінна. При обертанні кривої (1) навколо осі OZ утвориться поверхня обертання, яка описується такими параметричними рівняннями:

$$X = \varphi \cos v; \quad Y = \varphi \sin v; \quad Z = \psi, \quad (2)$$

де v – друга незалежна змінна – кут повороту кривої (1) навколо осі OZ . Крива (1) в такому випадку буде меридіаном поверхні.

У ролі меридіана візьмемо відому криву – верзир'єру. Її параметричні рівняння мають вигляд:

$$\varphi = \frac{1}{1+u^2} + a; \quad \psi = u. \quad (3)$$

Залежно від значення сталої a крива або наближатиметься до осі OZ , або ж віддалятиметься від неї. На рис. 1 побудовано меридіан поверхні обертання, яким є верзир'єра, для різних значень сталої a .

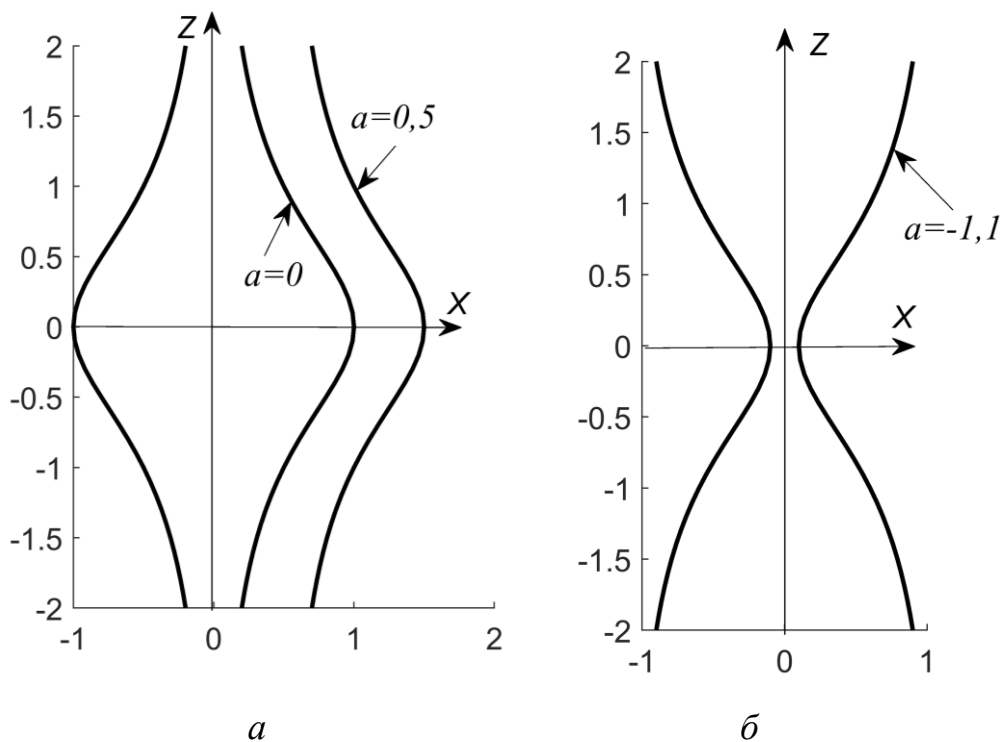


Рис. 1. Контури поверхні в залежності від значення сталої a :

a – для додатного значення; b – для від'ємного значення

Параметричні рівняння поверхні, утвореної обертанням верзир'єри навколо вертикальної осі, запишуться;

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{1}{1+u^2} + a \right) \cos v; \\ Y &= \left(\frac{1}{1+u^2} + a \right) \sin v; \\ Z &= u. \end{aligned} \quad (4)$$

У праці [6] наведено диференціальне рівняння, яке описує геодезичні лінії на поверхні обертання:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\varphi(\varphi'_u \varphi''_u + \psi'_u \psi''_u) - 2\varphi'_u (\varphi'^2_u + \psi'^2_u)}{\varphi(\varphi'^2_u + \psi'^2_u)} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{\varphi\varphi'_u}{\varphi'^2_u + \psi'^2_u} = 0. \quad (5)$$

Знайдемо перші і другі похідні рівнянь (3):

$$\varphi' = -\frac{2u}{(1+u^2)^2}; \quad \psi' = 1; \quad (6)$$

$$\varphi'' = -\frac{6u^2 - 2}{(1+u^2)^3}; \quad \psi'' = 0. \quad (7)$$

Після підстановки виразів (3), (6) і (7) у (5) отримуємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + 4u \frac{u^6 + 3u^4 - 3(a-1)u^2 + a + 2}{(au^2 + a + 1)(u^8 + 6u^6 + 8u^2 + 1)} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \frac{2(u+u^3)(au^2 + a + 1)}{u^8 + 6u^6 + 8u^2 + 1} = 0. \quad (8)$$

У результаті чисельного інтегрування рівняння (8) було отримано залежність $u=u(v)$, яка потім підставлялася у рівняння (4) для побудови геодезичних ліній. Початкова точка на поверхні обертання задавалася значенням змінної u , а напрям геодезичної в ній – значенням похідної цієї змінної. Якщо значення похідної u в початковій точці дорівнює нулю, то напрям геодезичної в ній збігається із паралеллю.

Характер геодезичних ліній для двох типів поверхонь, зображених на рис. 1, суттєво відрізняється між собою. На рис. 2, а, б побудовано геодезичні лінії для першого типу поверхні, а на рис. 2, в – для другого.

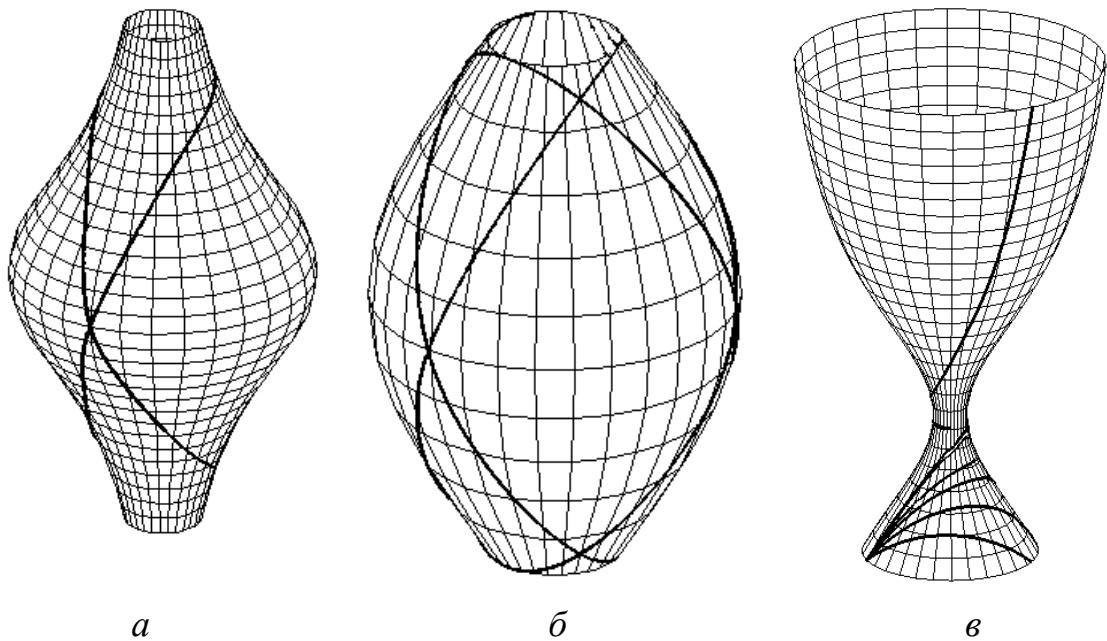
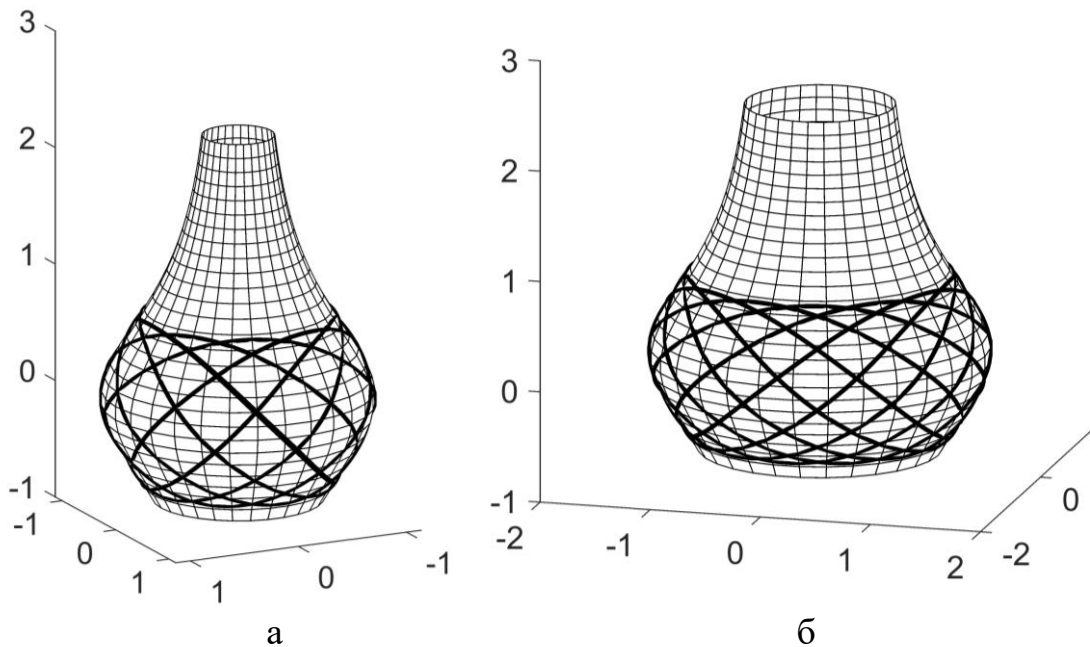


Рис. 2. Геодезичні лінії на поверхнях, утворених обертанням верз'єр'єси:
a, б – для поверхонь першого типу; *в* – для поверхонь другого типу

Для першого типу поверхонь (рис. 1, а) геодезичні лінії розташовуються між двома симетричними паралелями. Вони можуть бути як замкненими, так і незамкненими. При довільному значенні u в початковій точці лінія зазвичай незамкнена. Щоб вона була замкнена, потрібно підібрати відповідні початкові умови інтегрування рівняння (8), тобто значення змінної u або її похідної в початковій точці поверхні. На рис. 2, а, б побудовані замкнені геодезичні лінії. Для поверхні другого типу (рис. 1, б) геодезичні лінії незамкнені. Це видно на рис. 2, в, на якому вони виходять із точки на поверхні в різних напрямках. Напрямок задається величиною похідної u в цій точці, тобто при заданому значенні u . На рис. 3 побудовані замкнені геодезичні лінії для поверхонь із різним значенням сталої a ($a=0$ і $a=0,5$, як показано на рис. 1,а).



**Рис. 3. Замкнені геодезичні лінії поверхні між двома симетричними паралелями:
 a – при $a=0$; $б$ – при $a=0,5$**

На рис. 4 зображено фрагмент поверхні у вигляді бочки. При побудові геодезичної лінії вихідні дані інтегрування підібрано таким чином, що вона замкнена, подібна до кола і робить тільки один оберт. Якщо зображену поверхню на рис. 4 уявити дерев'яною бочкою, то така геодезична лінія може виступати у формі обруча із нестандартним розташуванням на її поверхні. При такому розташуванні він не буде сповзати із свого місця.

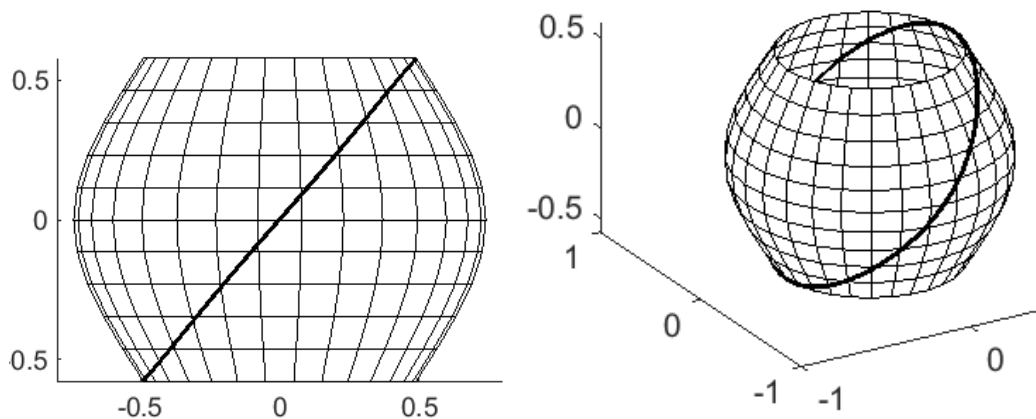


Рис. 4. Замкнена геодезична лінія поверхні близька до кола

Висновки і перспективи. Характер геодезичних ліній на поверхні обертання залежить від меридіана поверхні та його розташування по відношенню до осі обертання. При зміщенні меридіана по відношенню до осі в одну або протилежну сторону змінюється форма поверхні і характер геодезичних ліній на ній. В одному випадку вони можуть розташовуватися між двома паралелями і бути замкненими або незамкненими, в іншому – розташовуватися на всій поверхні і бути незамкненими. Перспектива подальших досліджень полягає у вивченні поведінки геодезичних ліній на поверхнях обертання залежно від натурального рівняння меридіана.

Список використаних джерел

1. Юрчук В. П., Гетьман О. Г. Проектування поверхні роторного копача шляхом використання геодезичної лінії. Труды Таврической государственной агротехнической академии. Вып.4. Прикл. геометрия и инж. графика. Т.6. Мелитополь: ТГАТА, 1999. С. 85 – 88.
2. Ковальова Г. В., Калінін О. О., Калініна Т. О., Нікітенко О. А. Наближена побудова геодезичних ліній на поверхнях обертання. Прикладні питання математичного моделювання. 2020. Том 3, № 2.2. С. 156 – 164.
3. Табакова І. С. Побудова геодезичної лінії гладкої поверхні, що виходить із даної точки у заданому напрямку. Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Математика. Геометрія. Інформатика. Мелітополь : МДПУ, 2014. Т. 1 С. 217–225.
4. Табакова І. С., Трунова Т. О. Побудова геодезичних ліній на односторонніх поверхнях типу пляшки Клейна. Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. 2016. № 1(86). С. 108–111.
5. Пилипака Т. С., Бабка В. М., Кременець Я. С. Особливості геодезичних ліній на поверхнях обертання. Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Науковий журнал. Луцьк: ЛНТУ, 2011. № 6. С. 182 – 185.
6. Пилипака С. Ф., Кременець Я. С. Теоретичний пошук рівнянь геодезичних ліній в кінцевому вигляді на поверхнях обертання. Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА, 2011. Вип. 87. С. 302 – 308.

References

1. Yurchuk, V. P., Hetman, O. H. (1999). Proektuvannia poverkhni rotornoho kopacha shliakhom vykorystannia heodezychnoi linii [Designing the surface of a rotary digger with a geodetic line]. Trudy Tavricheskoj gosudarstvennoj agrotehnicheskoi akademii, 4, Prikl. geometriya i inzh. Grafika, 6, 85–88.
2. Kovalova, H. V., Kalinin, O. O., Kalinina, T. O., Nikitenko, O. A. (2020). Nablyzhena pobudova heodezychnykh linii na poverkhniakh obertannia [Approximate

construction of geodesic lines on surfaces of revolution]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*, 3, 2.2, 156–64.

3. Tabakova, I. S. (2014). Pobudova heodezychnoi linii hladkoi poverkhni, shcho vykhodyt iz danoi tochky u zadanomu napriamku [Construction of a geodesic line of a smooth surface, emanating from a given point in a given direction]. *Naukovyi visnyk Melitopolskoho derzhavnogo pedahohichnogo universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Matematika. Heometriia. Informatyka*, 1, 217–225.

4. Tabakova, I. S., Trunova, T. O. (2016). Pobudova heodezychnykh liniy na odnostonnykh poverkhniakh typu plishky Kleina [Construction of geodesic lines on one-sided surfaces of the Klein bottle type]. *Bionika intellekta: nauch.-tehn. zhurnal*, 1(86), 108–111.

5. Pylypaka, T. S., Babka, V. M., Kremets, Ya. S. (2011). Osoblyvosti heodezychnykh liniy na poverkhniakh obertannia [Peculiarities of geodesic lines on surfaces of rotation]. *Kompiuterno-intehrovani tekhnolohii: osvita, nauka, vyrobnytstvo. Naukovyi zhurnal*, 6, 182–185.

6. Pylypaka, S. F., Kremets, Ya. S. (2011). Teoretychnyi poshuk rivnian heodezychnykh liniy v kintsevomu vyhliadi na poverkhniakh obertannia [Theoretical search for equations of geodesic lines in finite form on surfaces of revolution]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 87, 302–308.

CONSTRUCTION OF GEODESIC LINES ON SURFACES OF ROTATION OBTAINED BY DISPLACEMENT OF THE MERIDIAN

*S. Pylypaka, V. Nesvidomin, I. Hryshchenko, V. Babka, A. Nesvidomin, T. Volina,
Ya. Kremets*

Abstract. *Geodesic surface lines are analogous to straight lines on a plane. In addition to connecting two points of the surface by the shortest distance, they are the winding trajectories of the reinforcing threads in the strengthening of high-pressure cylinders. Just as a bundle of straight lines can be drawn from a given point on a plane in different directions, so there are geodesic lines on a surface that pass through a given point in different directions. Finding geodesic surface lines in the general case comes down to solving second-order differential equations.*

The purpose of the study is to investigate geodesic lines on the surface formed by the rotation of a given plane curve around a vertical axis and their transformation when this curve is shifted away from or towards the axis.

For surfaces of revolution, the second-order differential equation can be reduced to the first order and even reduced to an integral based on the well-known Clerot formula. However, in this case, geodesic lines in all directions can be constructed only for a limited number of surfaces of rotation, and only limited fragments of geodesic lines can be constructed on the remaining surfaces. The article considers the construction of geodesic lines using the numerical solution of a second-order differential equation. The obtained results were visualized.

Key words: *geodesic line, surface of rotation, differential equation, numerical methods*